Exercices : Probabilités

Partie A : Probabilités

Exercice 1

Dans un univers Ω, on donne deux événements A et B incompatibles tels que $p(A) = 0{,}2$ et $p(B) = 0{,}7$.
Calculer $(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(\bar{A})$ et $p(\bar{B})$.

Exercice 2

Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1) Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2) On lance deux fois le dé.
   a. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair
   b. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

Exercice 3

Un sac contient deux jetons numérotés 1 et 2.
On tire un jeton au hasard, puis on lance un dé autant de fois que le chiffre inscrit sur le jeton.
Calculer la probabilité que la somme du nombre lu sur le jeton et du (ou des) nombre(s) lu(s) sur le dé soit égale à 7. (On fera un arbre "sélectif")

Exercice 4

Deux lignes téléphoniques *A* et *B* arrivent à un standard. On note :
E_1 = "la ligne *A* est occupée"
E_2 = "la ligne *B* est occupée"
Après étude statistique, on admet les probabilités : $p(E_1) = 0{,}5$; $p(E_2) = 0{,}6$ et $p(E_1 \cap E_2) = 0{,}3$
Calculer la probabilité des événements suivants :
F = "la ligne *A* est libre"
G = "une ligne au moins est occupée"
H = "une ligne au moins est libre"

Exercice 5

On lance n dés ($n \geq 1$). On note A l'événement "obtenir au moins un 6".

1) Décrire $\bar{A}$
2) Exprimer en fonction de *n* la probabilité $p(\bar{A})$
3) En déduire que $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$
4) Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(A)$								

5) Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?

Exercice 6

Une urne *U* contient trois boules blanches et une urne *V* contient deux boules blanches et une boule noire.
On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans l'urne choisie.
Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

Exercice 7

Deux joueurs montrent simultanément un, deux ou trois doigts de leur main gauche. On suppose que chacun des deux joueurs montre de façon équiprobable un, deux ou trois doigts.

1) Quelle est la probabilité que les deux joueurs montrent le même nombre de doigts ?
2) Quelle est la probabilité que le nombre total de doigts montrés par les deux joueurs soit un nombre pair ?

Exercice 8
Dans une loterie, 100 billets sont vendus et il y a 7 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si on achète :

1) Un billet ?
2) Deux billets ?

Exercice 9

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un six en lançant un dé ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir un six (au moins) en lançant deux dés ?
3) Quelle est la probabilité d'obtenir un six (au moins) en lançant six dés ?

Exercice 10
Une cible est constituée de trois cercles concentriques de rayons respectifs $10\ cm$, $20\ cm$ et $30\ cm$.
Un tireur à l'arc s'entraîne. Il touche toujours la cible et la probabilité qu'il atteigne une zone est proportionnelle à celle-ci.
Déterminer la probabilité que le tireur atteigne la zone centrale ; la zone du milieu ; la zone extérieure.

Exercice 11
Trois amies parlent de l'organisation de leur anniversaire. En discutant, elles s'aperçoivent que deux d'entre elles sont nées le même mois. Calculons la probabilité que cela a de se produire.

1) Combien existe-t-il de répartitions possibles pour les mois de naissances des trois amies ? On estime que ces répartitions sont équiprobables.
2) On considère l'événement A : « deux amies au moins sont nées le même mois ». Déterminer par une phrase l'événement $\bar{A}$.
3) Combien existe-t-il de répartitions possibles où les trois amies sont nées à des mois différents ?
4) Calculer $p(\bar{A})$ puis $p(A)$.
5) Généralisation : calculer la probabilité qu'au moins deux amies sur quatre soient nées le même mois.
A partir de combien d'amies, la probabilité d'avoir au moins deux personnes nées le même mois est-elle supérieure à $0{,}5$?
6) On s'intéresse maintenant au jour de naissance. Dans une classe de 25 élèves, quelle est la probabilité d'avoir au moins deux élèves qui sont nés le même jour ?

Exercice 12
Dans chacun des calculs, donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1) Le jeune Bob obtient des résultats moyens à l'école. Pour le motiver, sa maman lui propose le jeu suivant : à chaque fois qu'il obtient une «bonne» note, il peut tirer successivement sans remise deux pièces dans un sac contenant 7 pièces de 1 euros et 3 pièces de 2 euros. Si les deux pièces sont de valeurs différentes, il garde ces deux pièces et sa maman complète le sac pour une autre fois. Si les deux pièces sont de même valeur, il remet les deux pièces dans le sac.
Déterminer la probabilité des évènements suivants :
A : « Bob tire deux pièces de 1 euro » ;
B : « Bob tire deux pièces de 2 euros » ;
C : « Bob tire deux pièces de valeurs différentes ».
2) On conserve le principe du jeu du 1).
On se propose de faire gagner un peu plus d'argent à Bob en changeant juste le nombre de pièces de 2 euros dans le sac, le nombre de pièces de 1 euro étant toujours de 7.
On suppose qu'il y a n pièces dans le sac dont toujours 7 pièces de 1 euro (n est un entier naturel supérieur ou égal à 10).
   a. Montrer que la probabilité p_n de l'évènement « Bob tire deux pièces de valeurs différentes » est :
$$p_n = \frac{14(n-7)}{n(n-1)}$$
   b. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[10; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{14(x-7)}{x(x-1)}$
Étudier les variations de f et en déduire les deux valeurs entières consécutives de n entre lesquelles la fonction f présente son maximum. Donner alors la valeur maximale de p_n.

Exercice 13
Une population de poussins comporte $n+1$ mâles et $n-1$ femelles. On choisit simultanément deux poussins au hasard.

1) Calculer en fonction de n la probabilité pour qu'ils soient de sexes différents.
2) Déterminer n pour que cette probabilité soit maximale.

Partie B : Variables aléatoires, espérance, écart-type

Exercice 1
On considère la loi de probabilité ci-contre.
Calculer $p(X=3)$ puis l'espérance et l'écart-type.

X	-2	-1	1	2	3
p	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}2$	

Exercice 2
On considère la loi de probabilité ci-contre.
Calculer a et b pour que l'espérance soit nulle.

X	-2	-1	1	2	3
p	$0{,}25$	$0{,}3$	$0{,}15$	a	b

Exercice 3
Un professeur donne à ses élèves une interrogation qui comporte quatre questions.
Pour chaque question, le professeur propose deux réponses : l'une juste et l'autre fausse et l'élève doit choisir parmi les deux réponses. Un élève, qui n'a rien appris, répond au hasard à chacune des quatre questions.

1) Combien y a-t-il de manières différentes de répondre à ces quatre questions ?
2) Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ?
   a. A : « Tous les résultats sont corrects ».
   b. B : « Tous les résultats sont faux »
   c. C : « Il y a exactement une réponse juste »
   d. D : « Il y a au moins une réponse juste »
3) Le professeur met 5 points pour chacune des réponses justes et enlève 3 points par réponse fausse. Si le total est négatif, il met 0. On note X la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   c. Calculer l'espérance de X.

Exercice 4
Pour une mise de $0{,}50$€, on lance un dé cubique équilibré. Tout résultat pair fait gagner le nombre d'euros indiqué sur le dé et tout résultat impair fait perdre le nombre d'euros indiqué sur le dé. Par exemple, obtenir 2 permet de gagner 2€ mais obtenir 3 fait perdre 3€.
On note G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique (en tenant compte de la mise).

1) Etablir la loi de probabilité de G.
2) Le jeu est-il équitable ? Justifier.

Exercice 5
On considère le jeu suivant : le joueur place une mise m sur la table ($m>0$) puis tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Si la carte tirée est

- un as, le joueur récupère sa mise est gagne 18€
- un roi, le joueur gagne 2 fois sa mise (et perd sa mise)
- une dame, le joueur récupère sa mise
- un valet, le joueur récupère sa mise

Dans les autres cas, le joueur perd sa mise.
On considère que chaque carte a la même probabilité d'être tirée et on note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur (en fonction de m)

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer $E(X)$ en fonction de m.
3) Existe-t-il des valeurs de m telles que le jeu soit équitable ? Si oui, les déterminer.

Exercice 6

L'expérience consiste à lancer deux dés à 4 faces, un bleu et un rouge, que l'on suppose équilibrés.
On note a le résultat obtenu par le dé bleu et b le résultat obtenu par le rouge.
On considère l'équation $ax^2 + bx + 1 = 0$.

a. Combien d'équations différentes obtient-on ? Justifier qu'elles sont équiprobables.

b. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de solutions de l'équation. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 7

Une urne contient 5 boules rouges et $(n-5)$ boules noires. $(n \geq 5)$

A/ Tirage avec remise : un joueur tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne.

1) Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
2) On note A l'événement « les deux boules sont de couleurs différentes ». Calculer $p_n(A)$ (probabilité de A) en fonction de n.
3) Déterminer pour quelle valeur de n le joueur a le plus de chances de réaliser A (on étudiera la fonction f définie sur $[5; +\infty[$ par $(x) = \frac{10(x-5)}{x^2}$)

B/ Tirage sans remise : un joueur tire au hasard successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1) Justifier qu'il y a $n^2 - n$ issues possibles.
2) Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
3) Déterminer la probabilité $q_n(A)$
4) Le joueur gagne 2€ s'il réalise A et perd 1€ dans le cas contraire. On note X le gain algébrique du joueur.
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Montrer que $E(X) = \frac{-n^2+31n-150}{n^2-n}$
   c. Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable.

Exercice 8

Une urne contient 1 boule rouge et n boules blanches $(n \geq 1)$. Les boules sont indiscernables au toucher. On prélève au hasard une boule de l'urne. Si elle est rouge, on gagne 10€ et si elle est blanche, on perd 1€.
On considère la variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur.

1) On suppose dans cette question qu'il y a 10 boules blanches $(n = 10)$
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance de X.
2) On suppose maintenant que n est un entier positif quelconque.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Exprimer $E(X)$ en fonction de n.
   c. Pour quelles valeurs de n, a-t-on $E(X) \geq 0$?
   d. Calculer n pour avoir $E(X) = -\frac{1}{2}$.

Correction exercices : probabilités

Partie A : Probabilités

Exercice 1

A et B sont incompatibles donc $\boxed{P(A \cap B) = 0}$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}7 - 0 = \boxed{0{,}9}$

$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \boxed{0{,}8}$ et $p(\bar{B}) = \boxed{0{,}3}$

Exercice 2

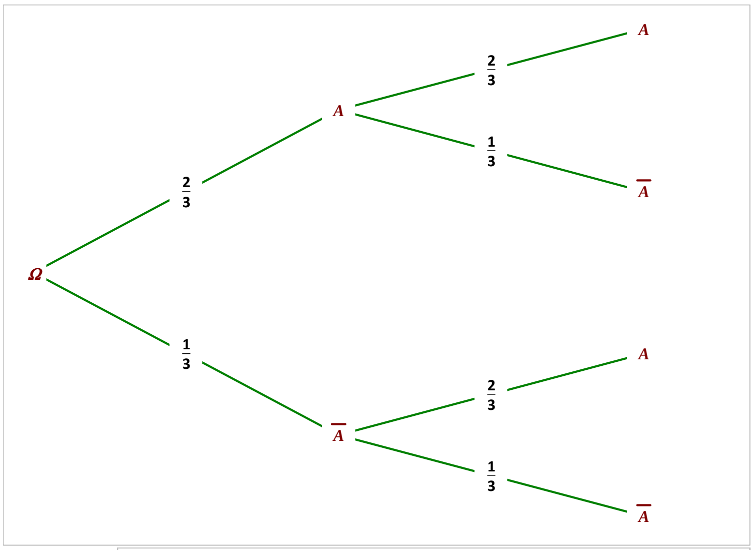
1) On note a la probabilité que 1 soit tiré. Ainsi, la probabilité que 2 soit tiré est égale à $2a$; la probabilité que 3 soit tiré est a, …

La somme des probabilités est égale à 1 donc $a + 2a + a + 2a + a + 2a = 1$ soit $9a = 1$ et $a = \frac{1}{9}$.

La probabilité d'obtenir un 6 est donc $2a$, soit $\boxed{\frac{2}{9}}$

2)

a. On note A l'événement « le résultat d'un lancer est pair ». On a donc $p(A) = \frac{2}{3}$. La situation est modélisée sur l'arbre ci-contre.



$$p(AA) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

b. Les deux tirages sont indépendants donc les probabilités sont multipliées entre elles :

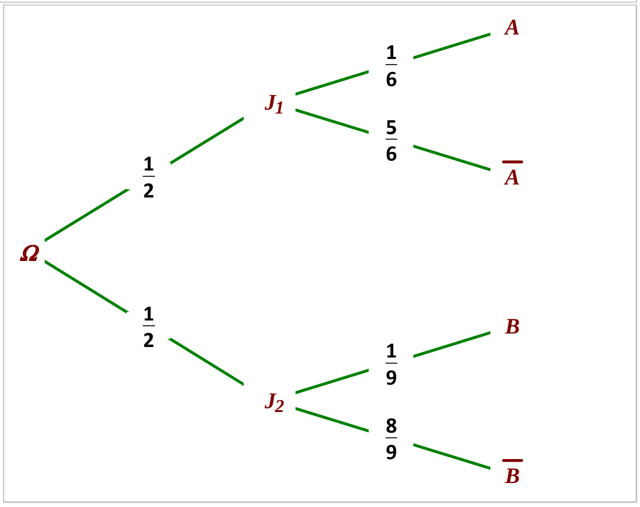
$$p(\text{deux } 6) = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \boxed{\frac{4}{81}}$$

Exercice 3

Si le jeton 1 est tiré, pour que la somme soit égale à 7, il faut obtenir 6 avec le dé ce qui se produit avec une probabilité égale à $\frac{1}{6}$. On note A l'événement « on obtient un 6 ».

Si le jeton 2 est tiré, il faut que la somme des deux résultats de dés soit égale à 5. Un tableau représentant tous les tirages des deux dés montre que la probabilité que la somme soit 5 avec deux dés est $\frac{4}{36}$ soit $\frac{1}{9}$. On note B l'événement « la somme des deux tirages de dés est 5 ».

On obtient alors l'arbre ci-contre.



$$p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \boxed{\frac{5}{36}}$$

Exercice 4

$p(F) = p(\overline{E_1}) = 1 - p(E_1) = \boxed{0{,}5}$

$p(G) = p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = 0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}3 = \boxed{0{,}8}$

$p(H) = p(\overline{E_1 \cap E_2}) = 1 - p(E_1 \cap E_2) = 1 - 0{,}3 = \boxed{0{,}7}$

Exercice 5

1) $\bar{A}$: « n'obtenir aucun 6 »

2) A chaque tirage, la probabilité de ne pas obtenir 6 est $\frac{5}{6}$. Les tirages sont indépendants donc $\boxed{p(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n}$

3) $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = \boxed{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$

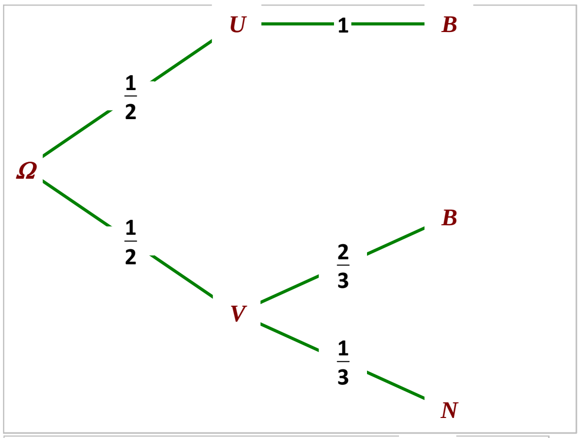
4)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(A)$	$\frac{1}{6} \approx 0{,}167$	0,306	0,421	0,518	0,598	0,665	0,721	0,767

5) Il faut donc que n soit supérieur à 8 pour que $p(A)$ soit supérieur à 0,75. Il faut donc au moins 8 dés.

Exercice 6

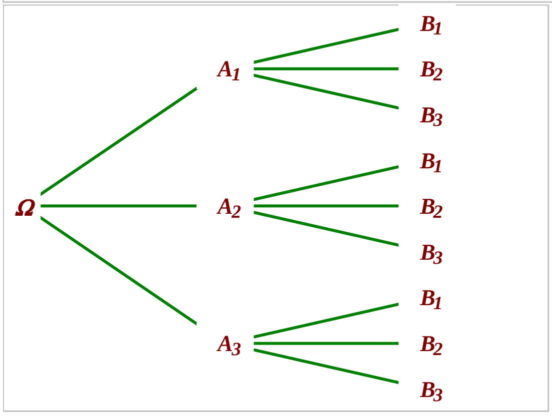
On construit l'arbre ci-contre qui représente la situation. On note U et V le nom de l'urne choisie et B le tirage d'une boule blanche et N d'une boule noire.



$$p(B) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

Exercice 7

1) L'arbre ci-contre représente la situation. A est le 1er joueur et B le 2ème joueur et l'indice représente le nombre de doigts choisi. Les neuf tirages sont équiprobables.



On note C l'événement « A et B choisissent le même nombre de doigts ».

$$p(C) = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

2) On note D : « le nombre total de doigts est pair »

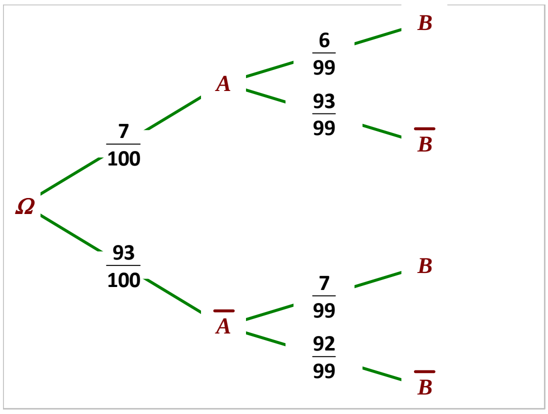
$$p(D) = \boxed{\frac{5}{9}}$$

Exercice 8

1) La probabilité de gagner si on achète un billet sur les 100 alors qu'il y a 7 billets gagnant est $\boxed{\frac{7}{100}}$

2) La situation est représentée sur l'arbre ci-contre.

On note A « le 1er billet est gagnant » et B « le 2ème billet est gagnant ».



$$p(A \cup B) = \frac{7}{100} \times \frac{6}{99} + \frac{7}{100} \times \frac{93}{99} + \frac{93}{100} \times \frac{7}{99} = \frac{1344}{9900} = \boxed{\frac{112}{825}}$$

Exercice 9

1) $p(6) = \boxed{\frac{1}{6}}$

2) A : « obtenir au moins un 6 en lançant deux dés » donc $\bar{A}$: « n'obtenir aucun 6 en lançant deux dés ».

$p(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$ donc $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{25}{36} = \boxed{\frac{11}{36}}$

3) B : « obtenir au moins un 6 en lançant trois dés » donc $\bar{B}$: « n'obtenir aucun 6 en lançant trois dés ».

$p(\bar{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$ donc $p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{125}{216} = \boxed{\frac{91}{216}}$

Exercice 10

On note Z_1 la zone centrale, Z_2 la zone intermédiaire et Z_3 la zone extérieure.

$\mathcal{A}_{Z_1} = \pi \times 10^2 = 100\pi$

$\mathcal{A}_{Z_2} = \pi \times 20^2 - \pi \times 10^2 = 300\pi$

$\mathcal{A}_{Z_3} = \pi \times 30^2 - \pi \times 20^2 = 500\pi$

L'aire totale de la cible est $\pi \times 30^2$ soit 900π.

$p(Z_1) = \frac{100\pi}{900\pi} = \boxed{\frac{1}{9}}$ $p(Z_2) = \frac{300\pi}{900\pi} = \boxed{\frac{1}{3}}$ et $p(Z_3) = \frac{500\pi}{900\pi} = \boxed{\frac{5}{9}}$

Exercice 11

1) Pour la 1ère amie, il y a 12 choix possible pour son mois de naissance. Pour la 2ème amie, il y a aussi 12 choix possible et de même pour la 3ème amie. Les mois de naissance étant indépendant les uns des autres, on multiplie entre eux les nombres de choix. Cela représente donc 12^3 choix, soit $\boxed{1728}$ possibilibés.

2) $\bar{A}$: « aucune des amies n'est nées le même mois ».

3) Pour la 1ère amie, il y a 12 choix possibles. La 2ème amie n'a plus que 11 possibilités pour ne pas être née le même mois. La 3ème amie n'a alors plus que 10 choix. Cela fait donc $12 \times 11 \times 10$ possibilités, soit $\boxed{1320}$

4) $p(\bar{A}) = \frac{1320}{1728} = \frac{12\times11\times10}{12\times12\times12} = \boxed{\frac{55}{72}}$ et $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{55}{72} = \boxed{\frac{17}{72}}$

5) Nombre de choix possible pour les 4 mois de naissances : 12^4

Nombre de choix possibles pour que les 4 mois soient différents : $12 \times 11 \times 10 \times 9$

$p(\bar{A}) = \frac{12\times11\times10\times9}{12^4} = \frac{55}{96}$ donc $p(A) = 1 - \frac{55}{96} = \boxed{\frac{41}{96}}$

Pour cinq amies : $p(\bar{A}) = \frac{12\times11\times10\times9\times8}{12^5} = \frac{55}{144}$ donc $p(A) = \boxed{\frac{89}{144}}$

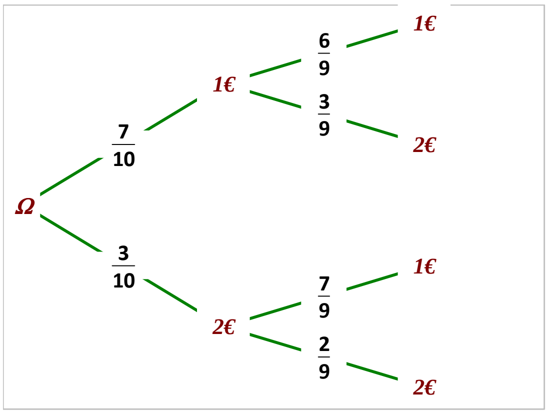
Donc il faut au moins cinq amies pour que la probabilité qu'au moins deux d'entres elles soient nées le même mois soit supérieure à 0,5.

6) $p(A) = 1 - \frac{365\times364\times363\times\ldots\times341}{365^{25}} \approx 0{,}569$

Il y a donc plus d'une chance sur deux pour que sur 25 personnes, au moins deux soient nés le même jour.

Exercice 12

1) On utilise l'arbre ci-contre pour représenter les différentes possibilités.



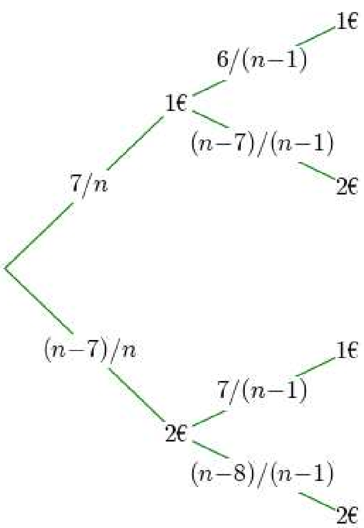
$p(A) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = \boxed{\frac{7}{15}}$

$p(B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \boxed{\frac{1}{15}}$

$p(C) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{42}{90} = \boxed{\frac{7}{15}}$

On pouvait aussi calculer $p(C)$ à l'aide de $1 - p(A) - p(B)$…

2) Le nombre de pièces totale du sac est maintenant de n, il y a 7 pièces de 1 euro donc $n - 7$ pièces de 2 euros. On obtient alors l'arbre suivant :



a. $p_n = \frac{7}{n} \times \frac{n-7}{n-1} + \frac{n-7}{n} \times \frac{7}{n-1} = \frac{7(n-7)+(n-7)\times7}{n(n-1)} = \boxed{\frac{14(n-7)}{n(n-1)}}$

b. f est une fonction rationnelle de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u: \mapsto 14(x-7)$ donc u est dérivable sur $[10; +\infty[$ et $u'(x) = 14$ et $v: x \mapsto x(x-1)$ donc v est dérivable sur $[10; +\infty[$ et $v'(x) = 2x - 1$ donc f est dérivable sur $[10; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{14(x^2-x) - 14(x-7)(2x-1)}{(x^2-x)^2}$$

$$= \frac{14x^2 - 14x - 14(2x^2 - x - 14x + 7)}{(x^2-x)^2}$$

$$= \frac{14x^2 - 14x - 28x^2 + 14x + 196x - 98}{(x^2-x)^2} = \frac{-14x^2 + 196x - 98}{(x^2-x)^2}$$

Le dénominateur est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de $-14x^2 + 196x - 98$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 196^2 - 4 \times (-14) \times (-98) = 32928$

Donc $-14x^2 + 196x - 98$ est du signe de $a = -14$ sauf entre les racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-196-\sqrt{32928}}{-28} = 7 + \sqrt{42}$

car $32928 = 4 \times 4 \times 49 \times 42$ donc $\sqrt{32928} = \sqrt{4} \times \sqrt{4} \times \sqrt{49} \times \sqrt{42} = 2 \times 2 \times 7 \times \sqrt{42} = 28\sqrt{42}$

et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-196+\sqrt{32928}}{-28} = 7 - \sqrt{42}$

x	10	$7+\sqrt{42}$	$+\infty$

Signe de $f'(x)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$
Variations de f	$\nearrow$ $\searrow$

D'après le tableau de variations, f présente un maximum en $7+\sqrt{42}$ or $7+\sqrt{42} \approx 13{,}5$ donc le maximum de f est atteint entre $n=13$ et $n=14$.
Pour connaître la valeur maximale de p_n, nous allons calculer les valeurs p_{13} et p_{14} qui sont les deux maximums potentiels.

$$p_{13} = \frac{14\times 6}{13\times 12} = \frac{2\times 7\times 6}{13\times 2\times 6} = \frac{7}{13}$$

$$p_{14} = \frac{14\times 7}{14\times 13} = \frac{7}{13}$$

Donc $p_{13} = p_{14}$ et la valeur maximale de p_n est $\boxed{\frac{7}{13}}$

Exercice 13

1) Un tirage simultané correspond à un tirage successif sans remise.

Pour un tirage d'un mâle puis d'une femelle, la probabilité est $\frac{n+1}{2n}\times\frac{n-1}{2n-1}$.
En effet, la probabilité de tirer un mâle en premier est $\frac{n+1}{2n}$ et ensuite il ne reste plus que $2n-1$ poussins dont $n-1$ femelles.
Pour un tirage d'une femelle puis d'un mâle, la probabilité est $\frac{n-1}{2n}\times\frac{n+1}{2n-1}$.
La probabilité d'obtenir deux sexes différents est $\frac{n+1}{2n}\times\frac{n-1}{2n-1}+\frac{n-1}{2n}\times\frac{n+1}{2n-1}$ soit $2\times\frac{(n+1)(n-1)}{2n(2n-1)} = \boxed{\frac{(n+1)(n-1)}{n(2n-1)}}$

2) Pour déterminer à quel moment la probabilité est maximale, on étudie la fonction

$p(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x(2x-1)} = \frac{x^2-1}{2x^2-x}$ définie sur $[1;+\infty[$. p est une fonction rationnelle donc est dérivable sur son ensemble de définition et

$$p'(x) = \frac{2x\times(2x^2-x)-(4x-1)(x^2-1)}{(2x^2-x)^2} = \frac{4x^3-2x^2-4x^3+4x+x^2-1}{(2x^2-x)^2} = \frac{-x^2+4x-1}{(2x^2-x)^2}$$

Le dénominateur est clairement positif donc $p'(x)$ est du signe du numérateur $N(x) = -x^2+4x-1$.
Pour étudier le signe de N, on calcule $\Delta = 4^2-4\times(-1)\times(-1) = 12$ donc N est du signe de $a=-1$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{-4+\sqrt{12}}{-2} = 2-\sqrt{3}$ et $x_2 = 2+\sqrt{3}$.

x	1 $\quad$ $2+\sqrt{3}$ $\quad$ $+\infty$
Signe de $p'(x)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$
Variations de p	0 $\nearrow$ $\searrow$

Comme $2+\sqrt{3}\approx 3{,}73$ et que n est un nombre entier, la probabilité p va être maximale soit pour $n=3$, soit pour $n=4$. Calculons les deux valeurs : $p(3) = \frac{2\times 4}{3\times 5} = \frac{8}{15} \approx 0{,}533$ et $p(4) = \frac{3\times 5}{4\times 7} = \frac{15}{28} \approx 0{,}536$
Il faut donc que n soit égal à $\boxed{4}$ pour que la probabilité d'obtenir deux poussins de sexes différents soit maximale.
On aura alors 5 mâles et 3 femelles.

Partie B : Variables aléatoires, espérance, écart-type

Exercice 1

La somme des probabilités est égale à 1 donc $p(X=3) = 1-(0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}2) = \boxed{0{,}2}$
$E(X) = -2\times 0{,}1-1\times 0{,}2+1\times 0{,}3+2\times 0{,}2+3\times 0{,}2 = \boxed{0{,}9}$
$V(X) = (-2)^2\times 0{,}1+(-1)^2\times 0{,}2+1^2\times 0{,}3+2^2\times 0{,}2+3^2\times 0{,}2-0{,}9^2$
$= 0{,}4+0{,}2+0{,}3+0{,}8+1{,}8-0{,}81 = 2{,}69$ donc $\sigma(X) = \sqrt{2{,}69} \approx \boxed{1{,}64}$

Exercice 2

La somme des probabilités est égale à 1 donc $0,25+0,3+0,15+a+b=1$ ou encore $a+b=0,3$.
L'espérance est nulle donc $-2\times 0,25-1\times 0,3+1\times 0,15+2a+3b=0$ ou encore $2a+3b=0,65$
On résout le système :

$$\begin{cases} a+b=0,3 \\ 2a+3b=0,65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,3-b \\ 2(0,3-b)+3b=0,65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,3-b \\ 0,6+b=0,65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,25 \\ b=0,05 \end{cases}$$

Exercice 3

1) Pour la 1ère question, il y a 2 choix. Pour la 2ème question, il y a 2 choix. Pour la 3ème question, il y a 2 choix et pour la 4ème question, il y a 2 choix. Ce qui fait un total de 2^4 choix, soit $\boxed{16}$

2)

a. Il n'y a qu'une seule possibilité pour avoir tout juste donc $p(A)=\boxed{\frac{1}{16}}$

b. Il n'y a aussi qu'une possibilité pour avoir tout faux donc $p(B)=\boxed{\frac{1}{16}}$

c. Il y a 4 possibilités d'avoir exactement une réponse juste : soit elle est pour la 1ère question, soit la 2ème, soit la 3ème et soit la 4ème… D'où $p(C)=\frac{4}{16}=\boxed{\frac{1}{4}}$

d. L'événement $\overline{D}$ correspond à « ne pas avoir de réponses correctes », autrement dit $\overline{D}=B$ d'où $p(\overline{D})=\frac{1}{16}$ et donc $p(D)=1-p(\overline{D})=\boxed{\frac{15}{16}}$

3)

a. Si on a 4 réponses justes, on a 20 points. Si on a 3 réponses justes et une fausse, on a 12 points $(3\times 5-3)$. Si on a deux réponses justes et deux fausses, on a 4 points $(2\times 5-2\times 3)$. Si on a trois réponses fausses et une juste, on a 0 (le total est $5-3\times 3=-4$ donc on ramène la note à 0). Et si on a quatre réponses fausses, on a également 0. Donc $\boxed{X\in\{20;12;4;0\}}$

b. Loi de probabilité de X :

x_i	20	12	4	0
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$

$p(X=20)=p(A)=\frac{1}{16}$; $p(X=12)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ en raisonnant comme pour l'événement C.
$p(X=4)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ car les deux réponses justes sont choisies parmi les quatre possibles d'où $\binom{4}{2}$ possibilités, soit 6.
$p(X=0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$ car ce cas regroupe les deux événements B et C.

c. $E(X)=20\times\frac{1}{16}+12\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+0=\frac{5}{4}+\frac{12}{4}+\frac{6}{4}=\frac{23}{4}=\boxed{5,75}$

Exercice 4

1)

g_i	$-5,5$	$-3,5$	$-1,5$	$1,5$	$3,5$	$5,5$
$p(G=g_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2) $E(G)=-5,5\times\frac{1}{6}-3,5\times\frac{1}{6}-1,5\times\frac{1}{6}+1,5\times\frac{1}{6}+3,5\times\frac{1}{6}+5,5\times\frac{1}{6}=0$

Donc le jeu est équitable.

Exercice 5

1)

x_i	$m+18$	$2m$	0	$-m$
$p(X=x_i)$	$\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{9}{13}$

2) $E(X)=\frac{m+18}{13}+\frac{2m}{13}+0-\frac{9m}{13}=\boxed{\frac{18-6m}{13}}$

3) $E(X)=0\Leftrightarrow 18-6m=0\Leftrightarrow m=3$

Si la mise est de 3€, alors le jeu est équitable.

Exercice 6

a. Il y a 4 valeurs possibles pour a et autant pour b, cela donne donc 16 équations possibles. Elles sont équiprobables car elles sont toutes différentes et les dés sont équilibrés.

b. On représente tous les tirages possibles dans un tableau et le calcul de Δ correspondant à b^2-4a

a \ b	1	2	3	4
1	-3	0	5	12
2	-7	-4	1	8
3	-11	-8	-3	4
4	-15	-12	-7	0

Les valeurs possibles pour X sont 0; 1 et 2.
$X=0$ quand $\Delta<0$
$X=1$ quand $\Delta=0$
$X=2$ quand $\Delta>0$. On a donc

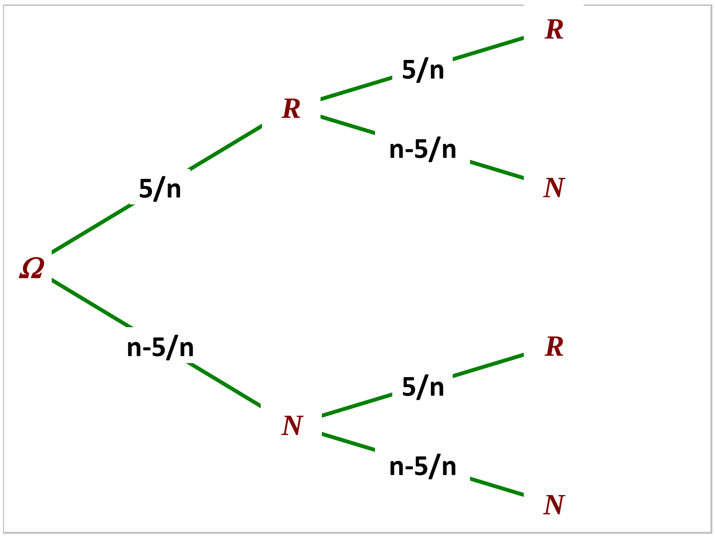
x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$

Exercice 7

Une urne contient 5 boules rouges et $(n-5)$ boules noires. $(n\geq 5)$

A/ Tirage avec remise

1)



2) $p_n(A)=\frac{5}{n}\times\frac{n-5}{n}+\frac{n-5}{n}\times\frac{5}{n}=\boxed{\frac{10(n-5)}{n^2}}$

3) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u:x\mapsto 10(x-5)$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x)=10$ et $v:x\mapsto x^2$ dérivable sur $[5\,;+\infty[$ avec $v'(x)=2x$ donc f est dérivable sur $\{5\,;+\infty[$ et

$$f'(x)=\frac{10x^2-2x\times 10(x-5)}{x^4}=\frac{-10x^2+100x}{x^4}$$
$$=\frac{-10x+100}{x^3}$$

Le dénominateur est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de $-10x+100$.

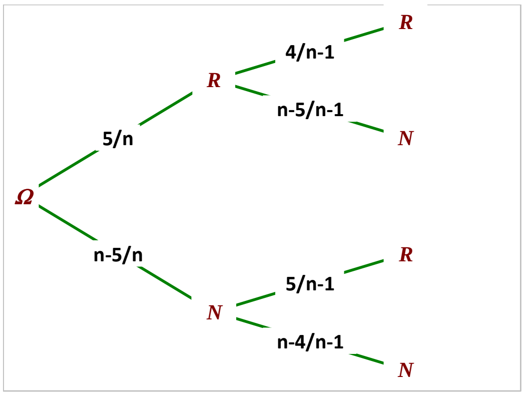
x	5		10		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

A a le plus de chance de se réalise pour $n=10$ donc quand il y a autant de boules noires que de boules rouges.

B/ Tirage sans remise

1) Pour le 1er tirage, il y a n possibilités et il y en a $n-1$ au 2ème tirage ; ceci fait donc $n(n-1)$ soit $\boxed{n^2-n}$ tirages possibles.

2)



3) $q_n(A)=\frac{5}{n}\times\frac{n-5}{n-1}+\frac{n-5}{n}\times\frac{5}{n-1}=\boxed{\frac{10(n-5)}{n^2-n}}$

4)

x_i	2	-1
$p(X=x_i)$	$\frac{10n-50}{n^2-n}$	$\frac{n^2-11n+50}{n^2-n}$

Remarque : pour calculer $p(X=-1)$, on utilise que la somme des probabilités est égale à 1.

$$E(X)=2\times\frac{10n-50}{n^2-n}-\frac{n^2-11n+50}{n^2-n}=\frac{20n-100-n^2+11n-50}{n^2-n}$$
$$=\boxed{\frac{-n^2+31n-150}{n^2-n}}$$

$E(X)=0\Leftrightarrow -n^2+31n-150=0$

$\Delta = 361$ donc il y a deux solutions : $n_1 = \frac{-31+19}{-2} = 6$ et $n_2 = \frac{-31-19}{-2} = 25$
Il faut donc qu'il y ait 6 ou 25 boules pour que le jeu soit équitable.

Exercice 8

1) L'urne contient 1 boule rouge et 10 boules blanches, soit 11 boules au total.
   a. Voir ci-contre.

x_i	10	-1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

   b. $E(X) = 10 \times \frac{1}{11} - \frac{10}{11} = 0$
2) L'urne contient $n + 1$ boules.
   a. Voir ci-contre

x_i	10	-1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$

   b. $E(X) = \frac{10}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \boxed{\frac{10-n}{n+1}}$
   c. $E(X) \geq 0 \Leftrightarrow 10 - n \geq 0$ car $n + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow n \leq 10$
Il faut donc qu'il y ait moins de 10 boules blanches pour que l'espérance soit positive.
   d. $E(X) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{10-n}{n+1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(10 - n) = -(n + 1) \Leftrightarrow -n = -21 \Leftrightarrow n = 21$

Il faut qu'il y ait 21 boules blanches pour que l'espérance soit égale à $-\frac{1}{2}$.