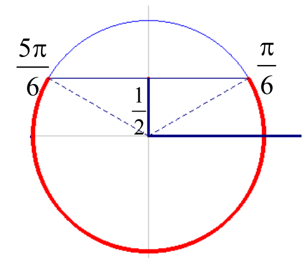
# Inéquations trigonométriques

Pour résoudre des inéquations trigonométriques, nous allons toujours nous servir d'une illustration sur le cercle trigonométrique.

Comme pour les équations trigonométriques, nous allons nous limiter à énumérer les solutions détaillées sur un intervalle déterminé. Cet intervalle sera fixé ici à $[0;2\pi[$ pour les fonctions sinus et cosinus, à période $2\pi$, et $[0;\pi[$ pour les fonctions tangente et cotangente, à période $\pi$.
Ces intervalles sont choisis de la sorte à ce que les solutions sont bien visibles sur le premier tour de cercle.

Au moment d'étudier les fonctions trigonométriques, il convient souvent de choisir des intervalles pouvant inclure la propriété de parité, en l'occurence $[-\pi;\pi[$ et $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ pour les fonctions sinus, cosinus et tangente, cotangente respectivement.

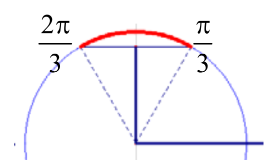
## A Exemples résolus




1) $\sin x \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \le \sin\frac{\pi}{6}$

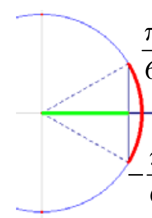
En tournant toujours dans le sens mathématique positif et en notant les solutions sur le premier tour de cercle, nous lisons sur le graphique :

$$\boxed{x \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right[ \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi)}$$




2) $2\sin x - \sqrt{3} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \ge \sin\frac{\pi}{3}$

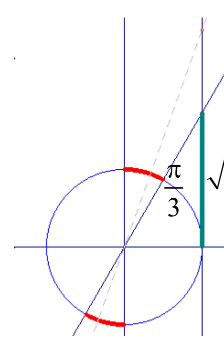
D'après le graphique : $\boxed{x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right] \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi)}$




3) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \ge \cos\frac{\pi}{6}$

D'après le graphique :

$x \in \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right] \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi) \quad \Big| +\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right] \quad (\mathrm{mod}\, 2\pi)}$




4) $\tan\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) > \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) > \tan\frac{\pi}{3}$

D'après le graphique :

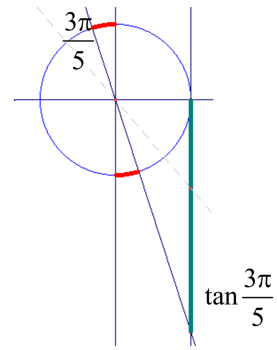
$3x+\frac{\pi}{2} \in \left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[ \quad (\mathrm{mod}\, \pi) \quad \Big| -\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3x \in \left]-\frac{\pi}{6};0\right[ \quad (\mathrm{mod}\, \pi) \quad \Big| :3$

$\Rightarrow \quad \boxed{x \in \left]-\frac{\pi}{18};0\right[ \quad \left(\mathrm{mod}\, \frac{\pi}{3}\right)}$

5) $\tan\frac{3\pi}{5} - \tan(2x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan(2x) \leq \tan\frac{3\pi}{5}$

D'après le graphique :

$2x \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{5}\right] \pmod{\pi} \;\big|\; :2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{10}\right] \left(\bmod \frac{\pi}{2}\right)}$




**Exercices plus poussés** :

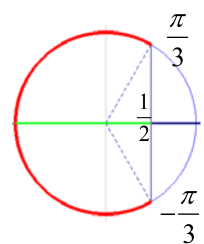
6) $\cos(2x) + \cos x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x - 1 + \cos x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0$

En résolvant cette inéquation du second degré en $\cos x$ :

| $\cos x$ | \|\| | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\cos^2 x + \cos x - 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

D'où : $2\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$

D'après le graphique : $\boxed{x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right] (\bmod 2\pi)}$




L'exercice suivant est un exercice *haut de gamme* :

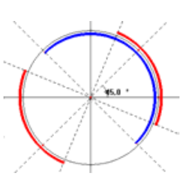
7) $\sin(3x) + \cos x > 0 \quad \Leftrightarrow \sin(3x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > 0$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin\left(\frac{3x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{2} + x}{2}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

Cas favorables : + + et - - :

| $\alpha$ | $I$ | $II$ | $III$ | $IV$ |
|---|---|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\sin\alpha$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |

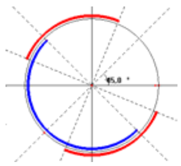
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow \quad 2x - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[ (\bmod 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right[ (\bmod \pi) \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} \in \left]0;\pi\right[ (\bmod 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[ (\bmod 2\pi) \end{cases}$$



L'intersection de ces intervalles nous fournit une première partie solution à cette inéquation :

$$\textit{Solution } S_1 = \left]-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right[ (\bmod 2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)<0 \Leftrightarrow & 2x-\frac{\pi}{4}\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[ \pmod{2\pi} & \Leftrightarrow & x\in\left]\frac{3\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\right[ \pmod{\pi} \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0 \Leftrightarrow & x+\frac{\pi}{4}\in\left]\pi;2\pi\right[ \pmod{2\pi} & \Leftrightarrow & x\in\left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right[ \pmod{2\pi} \end{cases}$$



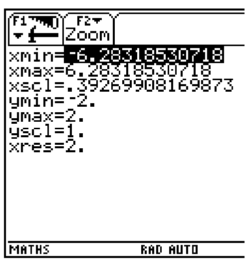
L'intersection de ces intervalles nous fournit une deuxième partie solution à cette inéquation :

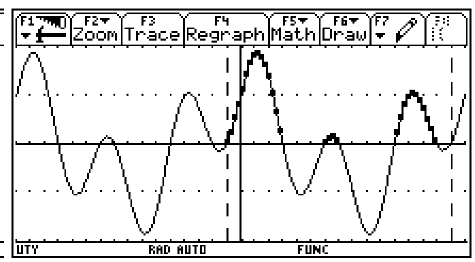
$$\textit{Solution } S_2=\left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{8};\frac{7\pi}{4}\right[ \pmod{2\pi}$$

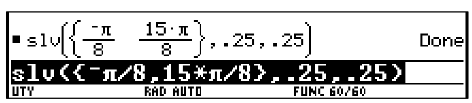
Solution finale : $\boxed{S=S_1\cup S_2=\left]-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{8};\frac{7\pi}{4}\right[ \pmod{2\pi}}$

**Contrôle graphique** : On trace le graphe de la fonction $f(x)=\sin(3x)+\cos x$ et on étudie sur quels intervalles ce graphe se situe au-dessus de l'axe des x.

$x\in[-2\pi;2\pi] \qquad xscal=\frac{\pi}{8}$




Autre méthode de résolution :

$\sin(3x)+\cos x>0 \quad\Leftrightarrow\quad 3\sin x-4\sin^3 x+\cos x>0 \quad \left| : \cos^3 x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right.$

Comme il s'agit toutefois d'une inéquation, il faut étudier la solution en fonction du signe de $\cos^3 x$ :

i) Cas où $\cos x>0$, l'inégalité garde son sens :

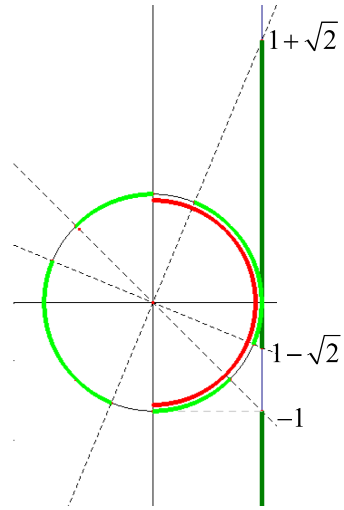
$$3\sin x-4\sin^3 x+\cos x>0 \qquad \left| : \cos^3 x>0 \Leftrightarrow x\in E_1=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[ \pmod{2\pi}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\cdot\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-4\tan^3 x+\frac{1}{\cos^2 x}>0 \qquad Or: \frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\tan x\cdot\left(1+\tan^2 x\right)-4\tan^3 x+1+\tan^2 x>0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\tan^3 x+\tan^2 x+3\tan x+1>0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\tan x+1)\cdot\left(\tan^2 x-2\tan x-1\right)>0 \qquad (\textit{par factorisation})$$



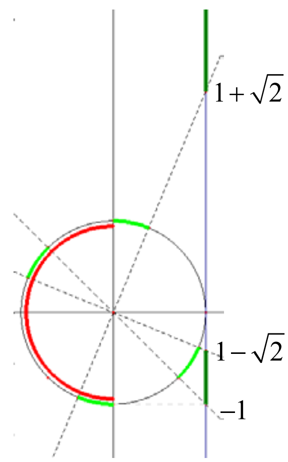

| $\tan x$ | | $-1$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $1+\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-(\tan x+1)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $\tan^2 x-2\tan x-1$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $-(\tan x+1)\cdot(\tan^2 x-2\tan x-1)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \quad , \quad \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)=1-\sqrt{2} \quad , \quad \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)=1+\sqrt{2}$$

D'où une première partie de solution : (sous la condition que $\cos x>0$)

$$S_1=\left]-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right[ \qquad (\bmod 2\pi)$$

ii) Cas où $\cos x<0$, l'inégalité change de sens :




$$3\sin x-4\sin^3 x+\cos x>0 \qquad \Big| : \cos^3 x<0 \Leftrightarrow x\in E_2=\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[ \ (\bmod 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \qquad 3\cdot\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-4\tan^3 x+\frac{1}{\cos^2 x}<0 \qquad \ldots$$

$$\Leftrightarrow \qquad -(\tan x+1)\cdot(\tan^2 x-2\tan x-1)<0$$

Le tableau des signes reste valable, il suffit de choisir les autres intervalles.

D'où une deuxième partie de solution : (sous la condition que $\cos x<0$)

$$S_2=\left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{8};\frac{3\pi}{2}\right[ \qquad (\bmod 2\pi)$$

iii) Cas où $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+0=-1<0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right)\notin S$$

iv) Cas où $x=-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1+0=1>0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right)\in S$$

D'où la solution finale : $\boxed{S=S_1\cup S_2\cup\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}=\left]-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{8};\frac{7\pi}{4}\right[\ (\bmod 2\pi)}$

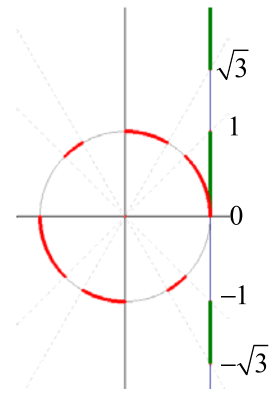
8) $\tan(2x) + \tan x > 0$ *Conditions :* $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *et* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad et \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$Domaine \ \ D = \mathbb{R} - \left\{ x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \, ; \, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-\tan^2 x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\tan x \cdot \left(3-\tan^2 x\right)}{1-\tan^2 x} > 0$$

| $\tan x$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tan x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $3-\tan^2 x$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $1-\tan^2 x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $\frac{\tan x \cdot \left(3-\tan^2 x\right)}{1-\tan^2 x}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ |



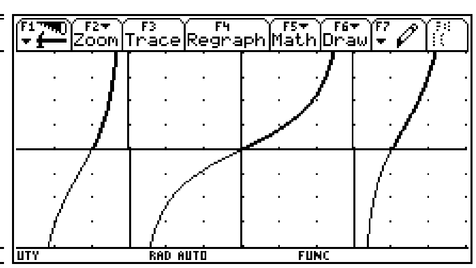

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \ \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \ , \ \tan(0) = 0 \ , \ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \ , \ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

D'où la solution : $\tan x \in \left]-\sqrt{3};-1\right[ \cup \left]0;1\right[ \cup \left]\sqrt{3};+\infty\right[$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \boxed{S = \left]-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right[ \cup \left]0;\frac{\pi}{4}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[ \ \ (\mathrm{mod}\, \pi)}$$

**Contrôle graphique** :

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \qquad xscal = \frac{\pi}{12}$$

## B Liste d'exercices du livre actuellement au programme [♠]

**Exercices conseillés p. 432**

- 472 Sélection entre les exemples 1) à 19)
- 473 Sélection entre les exemples des deux séries
- 474 1 ou 2 exemples
- 475 1), 2) et 3)
- Les exercices "pour s'autocontrôler"
- Pour les experts, l'exercice 489 représente un bon test des connaissances

[♠] Espace Math 5.6 - DeBoeck Wesmael - ISBN 2-8041-3251-X (1999)