La méthode d'Euler

Préambule

- On appelle **primitive** d'une fonction f définie sur un intervalle I toute fonction F définie et dérivable sur I et telle que $F' = f$.
  Par exemple, la fonction sinus est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction cosinus.
- On appelle **équation différentielle** une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives.
  Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2y - x$.

Si, dans les cas usuels, déterminer la fonction dérivée f' d'une fonction connue f ne représente plus de difficultés majeures, il en va tout autrement de la recherche d'une primitive ou d'une solution d'équation différentielle.
La méthode d'Euler, très simple quant à son principe, permet de pallier les difficultés citées en **approchant** numériquement une primitive d'une fonction ou une solution d'une équation différentielle lorsque l'on connaît une condition initiale.

1 Recherche d'une primitive

Le problème

On cherche à approcher la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f lorsqu'on connaît sa valeur y_0 en un réel x_0 et sa fonction dérivée.

La méthode

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f cherchée.
On connaît déjà un point de la courbe $\mathscr{C}_f$: le point $M_0(x_0; y_0)$.
On considère h un réel strictement positif (on pourrait bien sûr prendre h strictement négatif).
On pose $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, $\dots$, $x_{n+1} = x_n + h$
On considère les points M_0, M_1, M_2, $\dots$, etc. de la courbe $\mathscr{C}_f$, d'abscisse respective x_0, x_1, x_2, $\dots$
(Ces points, excepté le point M_0, ne sont bien sûr pas connus !)
Chaque point M_n a donc pour coordonnées $(x_n; f(x_n))$.
On cherche à construire, uniquement à l'aide de la connaissance de f' et de $y_0 = f(x_0)$, une suite de points $P_0(x_0; y_0)$, $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $\dots$, qui approchent les points M_0, M_1, M_2, $\dots$ de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Pour tout entier naturel n, l'approximation affine locale de f en x_n s'écrit :

$$f(x_n + h) \approx f(x_n) + hf'(x_n) \quad \text{pour } h \text{ proche de } 0$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + hf'(x_n) \quad (*)} \quad \text{pour } h \text{ proche de } 0$$

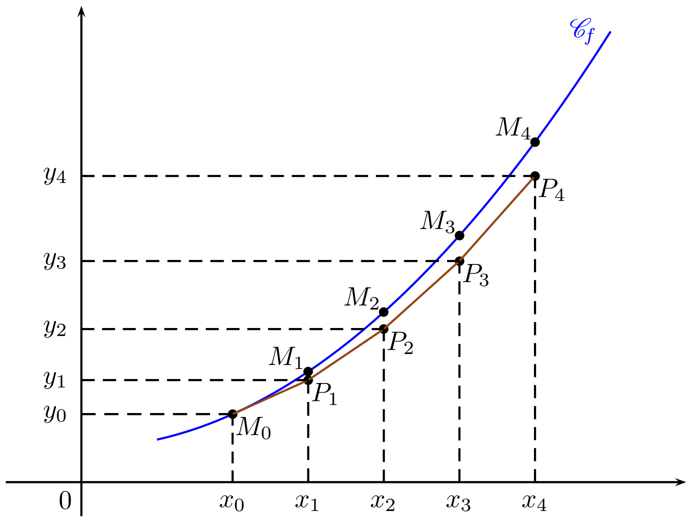
C'est cette relation qui va nous permettre de définir la suite (y_n) des ordonnées des points P_n.
On va en effet poser :

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_0 = f(x_0)} \\ \textbf{Pour tout entier naturel } \boldsymbol{n}\textbf{,}\ \boldsymbol{y_{n+1} = y_n + hf'(x_n)} \end{cases}$$

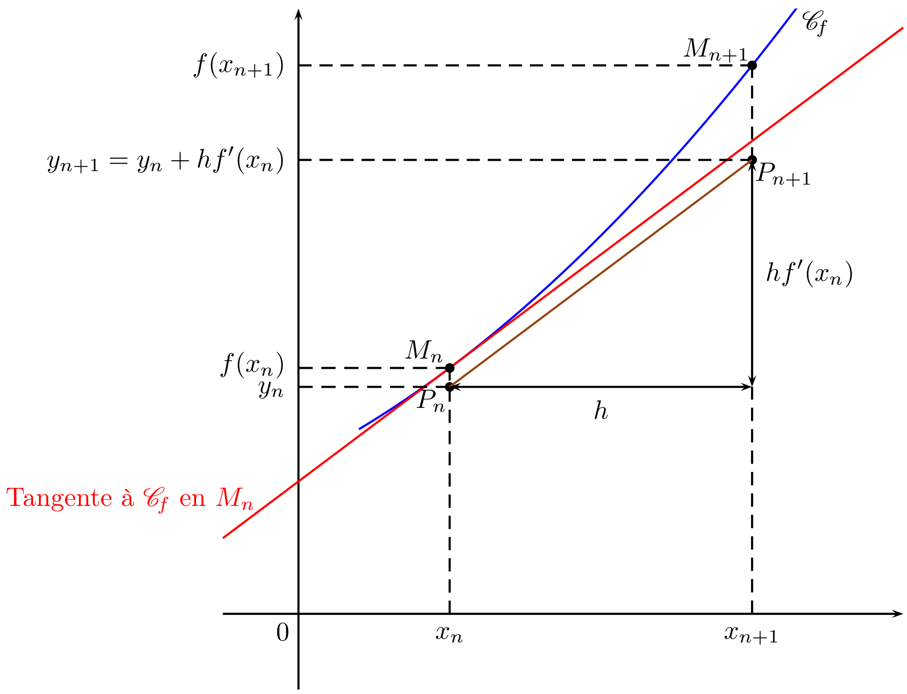
Justifions que pour tout entier naturel n, $y_n \approx f(x_n)$.

- $y_0 = f(x_0)$
- $y_1 = y_0 + hf'(x_0) = f(x_0) + hf'(x_0) \approx f(x_1)$ d'après $(*)$ appliquée pour $n = 0$
  On a donc bien $y_1 \approx f(x_1)$ et le point $P_1(x_1; y_1)$ est proche du point $M_1(x_1; f(x_1))$.
- $y_2 = y_1 + hf'(x_1) \approx f(x_1) + hf'(x_1) \approx f(x_2)$ d'après $(*)$ appliquée pour $n = 1$
  On a donc bien $y_2 \approx f(x_2)$ et le point $P_2(x_2; y_2)$ est proche du point $M_2(x_2; f(x_2))$.
- et ainsi de suite $\dots$
  Pour tout entier naturel n, $y_n \approx f(x_n)$ et le point $P_n(x_n; y_n)$ est proche du point $M_n(x_n; f(x_n))$.

On construit ainsi une suite de points $P_n(x_n;y_n)$.
En joignant les points $P_0(= M_0)$, P_1, P_2, ... on obtient une ligne polygonale qui approche la courbe $\mathscr{C}_f$.



Chaque segment $[P_n;P_{n+1}]$ est parallèle à la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M_n puisque ces segments ont pour coefficient directeur $f'(x_n)$.



Remarque

On pourrait penser qu'en raison des approximations effectuées, la méthode ne donne pas de bons résultats. En fait, sous réserve que le pas h soit suffisamment petit, cette méthode est relativement performante.

Exercice 1

On cherche une fonction f définie sur $[1;4]$ telle que $f(1) = 0$ et telle que pour tout $[1;4]$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Appliquer la méthode d'Euler sur l'intervalle $[1;4]$ en prenant 0,01 comme pas.
Définir les deux suites (x_n) et (y_n) ainsi obtenues.

2. À l'aide d'un tableur, calculer les termes de la suite (y_n) et visualiser alors une courbe approchée de la fonction f.

2 Résolution d'une équation différentielle

Le problème

Cette fois, on cherche à approcher la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f lorsqu'on connaît sa valeur y_0 en un réel x_0 et une équation différentielle que vérifie f.

La méthode

Il faut adapter la méthode vue dans le paragraphe précédent sur la recherche d'une primitive puisque cette fois, on ne connaît plus explicitement la fonction dérivée de f.

On va partir d'un exemple : on cherche une fonction f dérivable sur $[0;1]$ solution de l'équation différentielle $y' = 2y - 5$ et vérifiant $y(0) = 2$.

On considère h un réel strictement positif.
On pose $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ..., $x_{n+1} = x_n + h$ (dans notre exemple, $x_0 = 0$)

Pour tout entier naturel n, l'approximation affine locale de f en x_n s'écrit :

$$f(x_n + h) \approx f(x_n) + hf'(x_n) \quad \text{pour } h \text{ proche de } 0$$

c'est-à-dire

$$f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + hf'(x_n) \quad \text{pour } h \text{ proche de } 0$$

$$\begin{aligned} f(x_n) + hf'(x_n) &= f(x_n) + h(2f(x_n) - 5) \qquad (\text{car } f' = 2f - 5) \\ &= f(x_n) + 2hf(x_n) - 5h \\ &= (1 + 2h)f(x_n) - 5h \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\boldsymbol{f(x_{n+1}) \approx (1 + 2h)f(x_n) - 5h \quad (*)} \quad \text{pour } h \text{ proche de } 0$$

La méthode d'Euler conduit donc à **définir** la suite (y_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_0 = f(x_0) = 2} \\ \textbf{Pour tout entier naturel } \boldsymbol{n,\ y_{n+1} = (1 + 2h)y_n - 5h} \end{cases}$$

Justifions que pour tout entier naturel n, $y_n \approx f(x_n)$.

- $y_0 = f(x_0) = 2$
- $y_1 = (1 + 2h)y_0 - 5h = (1 + 2h)f(x_0) - 5h \approx f(x_1)$ d'après $(*)$ appliquée pour $n = 0$
  On a donc bien $y_1 \approx f(x_1)$.
- $y_2 = (1 + 2h)y_1 - 5h \approx (1 + 2h)f(x_1) - 5h \approx f(x_2)$ d'après $(*)$ appliquée pour $n = 1$
  On a donc bien $y_2 \approx f(x_2)$.
- et ainsi de suite ...
  Pour tout entier naturel n, $y_n \approx f(x_n)$.

Remarques

- Cette fois-ci, le point P_{n+1} n'est plus sur la parallèle à la tangente à $\mathscr{C}_f$ en M_n passant par P_n.
  En effet, le point P_{n+1} a pour ordonnée $y_{n+1} = (1 + 2h)y_n - 5h = y_n + h(2y_n - 5)$
  Le point Q_{n+1} d'abscisse x_{n+1} sur la parallèle à la tangente à $\mathscr{C}_f$ en M_n passant par P_n a pour ordonnée $y_{n+1} = y_n + hf'(x_n) = y_n + h(2f(x_n) - 5)$ et $f(x_n) \neq y_n$
  Les points P_{n+1} et Q_{n+1} sont bien-sûr proches puisque $y_n \approx f(x_n)$.
- On peut être tenté d'écrire, comme dans la recherche d'une primitive, que $y_{n+1} = y_n + hf'(x_n)$ et ensuite remplacer $f'(x_n)$ par $2y_n - 5$ pour aboutir à $y_{n+1} = y_n + h(2y_n - 5)$ (qui est la bonne relation).
  Ce raisonnement n'est pas correct puisque $f'(x_n)$ **n'est pas égal** à $2y_n - 5$.
  Il faut donc d'abord utiliser l'approximation affine locale pour parvenir à une valeur approchée de $f(x_{n+1})$ (ici $f(x_{n+1}) \approx (1 + 2h)f(x_n) - 5h$) et ensuite **définir** la suite (y_n)
  (ici en posant $y_0 = 2$ et $y_{n+1} = (1 + 2h)y_n - 5h$ pour tout entier naturel n).

Exercice 2

Représenter, en prenant un pas $h = 0{,}01$, à l'aide du tableur la courbe approchée de la fonction f solution sur $[0;1]$ de l'équation différentielle $y' = 2y - 5$ et vérifiant $y(0) = 2$ (on admet ici l'existence et l'unicité d'une telle solution).

Exercice 3

Préambule
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et telles que pour tout $x \in I$, $u'(x) = v'(x) = 2$.

1. Montrer que la fonction $u - v$ est constante sur l'intervalle I.

2. En déduire l'ensemble des primitives sur I de la fonction $f : x \longmapsto 2$.

On cherche une fonction g dérivable sur $[0;1]$ telle que $g' = -2g^2$ et $g(0) = -\dfrac{1}{4}$.

1. Appliquer la méthode d'Euler sur l'intervalle $[0;1]$ en prenant 0,01 comme pas et définir les deux suites (x_n) et (y_n) ainsi obtenues.

Représenter alors, à l'aide du tableur, une courbe approchée de la fonction g.

2. Démontrer que g est décroissante sur $[0;1]$.

En déduire que g ne s'annule pas sur $[0;1]$.

3. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = 2$.

4. En utilisant le résultat de la question précédente et le préliminaire, exprimer $\dfrac{1}{g(x)}$ en fonction de x et en déduire l'expression de $g(x)$.

5. Tracer la courbe représentative de la fonction g sur la même fenêtre graphique du tableur et comparer alors la courbe approchée et la courbe exacte.

Remarques

Du point de vue du mathématicien la solution idéale d'une recherche de primitive ou d'une solution d'une équation différentielle consisterait en une « formule » dont on pourrait extraire toute la substance : représentation graphique, tableau de valeurs, monotonie, etc.
Hélas, ce n'est pas toujours possible. Par ailleurs, obtenir une solution exacte ne semble pas toujours nécessaire et souvent une solution approchée sera amplement suffisante.
Les logiciels de calcul formel tels que Mathematica, Maple ou Mupad proposent tous des « solveurs numériques » d'équation différentielle. Ils fonctionnent avec des méthodes beaucoup plus élaborées que la méthode d'Euler (comme par exemple la méthode de Runge-Kutta).