Information chiffrée

1 Rappels de première

1.1 Pourcentage et proportion

Définition :

Une information chiffrée peut être présentée en :

- **valeur absolue** et dans ce cas on précise en général l'unité.
- **valeur relative**, c'est à dire en proportion, et dans cas il n'y a pas d'unité. La proportion peut être exprimée sous trois formes : écriture fractionnaire, écriture décimale ou en pourcentage.
- Si l'on a une sous-population d'effectif n_0 dans une population d'effectif total, n :

$$\text{valeur relative} = \frac{\dots}{\dots}$$

La valeur relative est aussi appelée **fréquence** en langage statistique.

Exemple :

Dans une classe de 32 élèves il y a 17 filles et dans une autre classe de 28 élèves il y a 15 filles.

1. Les valeurs absolues de filles sont respectivement :
2. Les valeurs relatives de filles parmi les élèves de la classe (à 10^{-2} près) sont respectivement :
3. Les valeurs relatives de filles parmi les élèves de la classe en pourcentage sont respectivement :

1.2 Pourcentage d'une grandeur

Propriété :

Prendre $t\%$ d'une grandeur revient à multiplier cette grandeur par $\frac{t}{100}$

Exemple :

On propose une réduction de 25% sur une somme de 150 euros. Le montant de la réduction est égale à :

1.3 Taux d'évolution

1.3.1 De la valeur initiale à la valeur finale

Propriété :

Si une quantité évolue à partir d'une valeur y_1 de départ d'un taux t, alors la valeur finale y_2 est égale à :

$$\ldots$$

On a une augmentation si $t > 0$ et une diminution si $t < 0$.

Définition :

$1 + t$ est appelé le **coefficient multiplicateur** associé au taux d'évolution t.

Remarque :

- Pour une augmentation de $a\%$, le coefficient multiplicateur est égal à : ……
- Pour une diminution de $a\%$, le coefficient multiplicateur est égal à : ……

Exemples :

1. Un article de 145 euros a baissé de $4,5\%$.
   - Le coefficient multiplicateur est égal à……
   - Le nouveau prix est égal à ……
2. Un article de 145 euros a augmenté de $4,5\%$.
   - Le coefficient multiplicateur est égal à……
   - Son nouveau prix est égal à ……

1.3.2 Variation absolue, variation relative

Propriété et définition :

Soit une quantité qui évolue à partir d'une valeur y_1 de départ d'un taux t à la valeur finale y_2

- La **variation absolue** est égale à :

  $$\ldots\ldots$$

  En général une variation a une unité qu'il faut mentionner.
- La **variation relative** est égale à :

  $$\ldots\ldots$$

  Une variation relative n'a pas d'unité et, en général, est exprimée en pourcentage.

Exemple :

Année	1999	2000	2001
Prix du baril de Pétrole en dollars	$13,83$	$24,98$	$23,20$

1. Entre 1999 et 2000 la variation absolue et la variation relative sont respectivement égale à ......

2. Entre 2000 et 2001 la variation absolue et la variation relative sont respectivement égale à ......

Remarque :
- Si la variation est strictement positive alors on a une augmentation.
- Si la variation est strictement négative alors on a une diminution.

1.3.3 Trouver le taux d'évolution

Propriété :

Le taux d'évolution est égal à la variation relative.
Autrement dit : si une quantité varie d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2 alors le taux d'évolution est égal à :

$$\ldots\ldots$$

Démonstration :
Soit t le taux d'évolution entre une valeur initiale y_1 et une valeur finale y_2.

$$y_2 = \ldots\ldots y_1$$

$$y_2 = \ldots\ldots$$

$$y_2 - y_1 = \ldots\ldots$$

$$t = \ldots\ldots$$

Exemple :

Sachant que le cours de l'action d'une entreprise gérant un réseau social est passé de 38 dollars à son introduction en bourse à 26,25 dollars le 18 mai 2013, calculons le pourcentage correspondant à la baisse du prix de l'action.

1.3.4 Le coefficient multiplicateur réciproque

Définition :

Soit une quantité qui varie d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2.
On appelle **coefficient multiplicateur réciproque** le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_2 à y_1.
Le taux d'évolution associé à ce coefficient multiplicateur est appelé **taux d'évolution réciproque**, il donne le taux d'évolution de y_2 à y_1.

Propriété :

Soit une quantité qui varie d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2 avec un taux t.
Le **coefficient multiplicateur réciproque** vaut :

...

et le **taux d'évolution réciproque** vaut :

...

Démonstration :

Pour le coefficient multiplicateur réciproque :

$$y_2 = \ldots\ldots y_1$$

$$y_1 = \frac{y_2}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$y_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots y_2$$

Pour le taux réciproque : Le coefficient multiplicateur réciproque est égal à : . . . .

Donc le taux d'évolution réciproque vaut :. . . . .

Exemple :

Le prix du gasoil a augmenté de 20% en un an. Son prix actuel est de 1,07€ par litre.

Le coefficient multiplicateur réciproque est $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

or $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

Il y a un an le litre de gasoil valait ....

Par ailleurs $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

Le taux d'évolution réciproque est égal à $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

2 Évolutions successives

2.1 Taux global et coefficient multiplicateur global

Définition :

Soit une quantité qui varie d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2 après avoir subit une succession d'évolutions.
On appelle **coefficient multiplicateur global** le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_1 à y_2.
Le taux d'évolution associé à ce coefficient multiplicateur est appelé **taux d'évolution global**, il donne le taux d'évolution de y_1 à y_2.

Propriété :

Si une quantité subit n évolutions successives (augmentations ou diminutions) de taux respectifs $t_1, t_2, \ldots, t_n$ à partir d'une valeur initiale y_1, alors le **coefficient multiplicateur global** vaut :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Et le **taux global** : ....

Démonstration dans le cas de trois évolutions :

Pour le coefficient multiplicateur global : Soit y_1 la valeur initiale, t_1 le taux d'évolution de la quantité y_1 à une quantité x_1, puis t_2 le taux d'évolution de la quantité x_1 à une quantité x_2, et enfin t_3 le taux d'évolution de la quantité x_2 à la quantité x_3 qui est la valeur finale y_2,

$$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots y_1$$

$$x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_1$$

$$x_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_1$$

$$y_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_1$$

Exemple :

La population d'une ville augmente de 2,3% en un an puis diminue de 3,4% les deux années suivantes.

...

Le coefficient multiplicateur global est donc ....

Le taux global d'évolution est .... soit une baisse de ....

Attention : ce n'est pas la somme des taux successifs : ....

2.2 Taux moyen

2.2.1 Équation $x^n = a$

Propriété (admise) :

Soient a un nombre réel positif et n un entier naturel non nul.
L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$.

définition :

Soient a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel non nul.
L'unique solution de l'équation $x^n = a$ s'appelle la racine $n^{\text{ième}}$ de a que l'on note :

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Exemple :
$x^3 = 64$ si et seulement si $x =$ .... c'est à dire $x =$ ......

2.2.2 Application au calcul de taux moyen

Propriété et définition :

Si une quantité subit n évolutions successives et que le taux global est t_G, on appelle alors **coefficient multiplicateur moyen** le nombre

....

et **taux moyen** le taux qui lui est associé, c'est à dire le nombre

....

C'est le taux d'évolution qu'il aurait fallu donner à chacune des n évolutions pour obtenir le même taux global.

Exemples :

- Un article au prix initiale de 100 € subit la première année une augmentation de 2 % puis l'année suivante une baisse de 30 %.

  $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$
  Cet article a donc subit .... de baisse globale.

  $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$
  Cet article a donc subit .... de baisse annuelle moyenne.
- Un produit a vu son prix multiplié par 1,6 en 4 ans. Soit t_m le taux d'évolution moyen annuel.

  On a $(1 + t_m)^{\cdots\cdots} = \cdots\cdots\cdots\cdots$

  donc $t_m = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$. D'où $t_m \approx \cdots\cdots\cdots\cdots$.

  L'article a donc subit$\cdots\cdots\cdots\%$ d'augmentation par an en moyenne.

3 Indices de base 100

1. **Indice simple en base 100**

Définition :

Soit une quantité qui varie d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2.
On appelle **indice (simple) de base 100** de y_2 par rapport à y_1, le nombre I tel que l'évolution qui fait passer de y_1 à y_2 fait passer de 100 à I.
Autrement dit le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

y_1	y_2
......	......

Remarque :
y_1 est la valeur à la date de référence choisie. Un indice permet de calculer ou de comparer facilement l'évolution d'une grandeur entre deux périodes données. Il est souvent utilisé en économie ou dans la vie courante. Un indice n'a pas d'unité.

Propriété :

L'indice I de base 100 d'une quantité y_2 par rapport à y_1, est égal à :

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \times \dots\dots\dots$$

Démonstration :
Soit I l'indice de base 100 d'une quantité y_2 par rapport à y_1. Par définition le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

y_1	y_2
......	......

Or dans un tableau de proportionnalité les ....
Donc :

$$y_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots = y_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots = \frac{y_2 \dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$I = \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \times \dots\dots\dots\dots$$

Exemple :

On suit l'évolution du prix d'un produit : il valait 16 € en 2006 et vaut 18,2 € en 2007.

....

L'indice du prix en 2007 par rapport à 2006 est donc ....

2. **<u>Indice et taux d'évolution</u>**

Propriété :

> Soit l'indice I (de base 100) d'une quantité y_2 par rapport à une quantité y_1.
> On suppose que l'on connaît le taux d'évolution t de y_1 à y_2. Alors :
>
> $$I = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Démonstration :

Soit l'indice I (de base 100) d'une quantité y_2 par rapport à une quantité y_1. D'après la propriété précédente , on a :

$$I = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \times \dots\dots\dots$$

Or, si t est le taux d'évolution de y_1 à y_2, on a $\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots\dots$

D'où, $I = (\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots) \times \dots\dots\dots\dots..$

Remarque :

Soit c le coefficient multiplicateur associé au taux d'évolution t. Puisque $c = 1 + t$,

$$I = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Propriété :

> Soit t le taux d'évolution d'une quantité y_1 à une quantité y_2. On suppose que l'on connaît l'indice I (de base 100) de y_2 par rapport à y_1. Alors
>
> $$t = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Démonstration :

- D'une part, on a $I = \frac{y_2}{y_1} \times 100$ par définition. Donc $\frac{y_2}{y_1} = \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ (1).

- D'autre part, $t = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1}$ par définition. Par conséquent, $t = \frac{y_2}{y_1} - \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$,
  soit $t = \frac{y_2}{y_1} - \dots\dots\dots$ (2).

- (1) et (2) donne :

$$t = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemples :

On prend pour référence de l'indice des prix des produits manufacturés l'année 2004.

- Si l'indice en 2005 vaut 105,3 alors le taux d'évolution entre 2004 et 2005 a été de :

  ...

- Si entre 2004 et 2006, les prix ont augmenté de 9,7 % alors l'indice des prix en 2006 est :

  ...

Plus généralement :

— Le taux d'évolution entre deux valeurs de la grandeur étudiée est égal au taux d'évolution entre les indices associées à ces deux valeurs.

— Le coefficient multiplicateur entre deux valeurs de la grandeur étudiée est égal au coefficient multiplicateur entre les indices associés à ces deux valeurs.